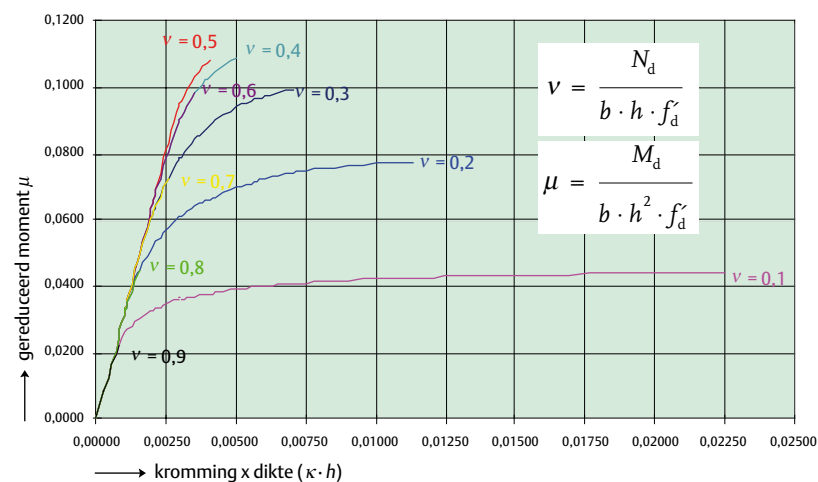
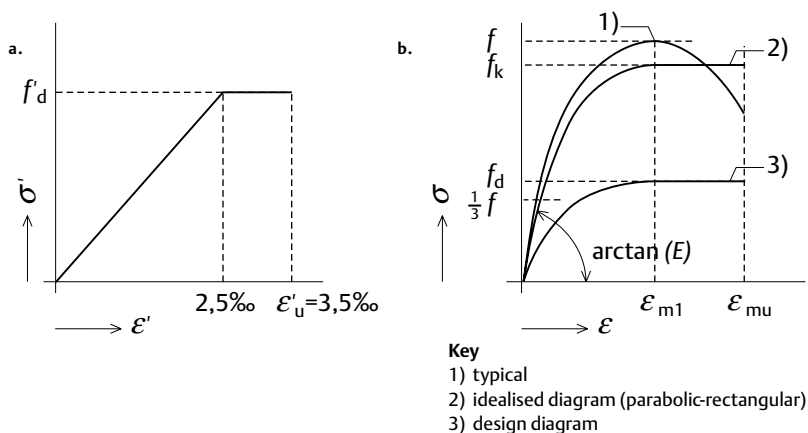


Ontwerpen en dimensioneren van steenconstructies (29)

Fysisch niet-lineair gedrag van metselwerk onder samengestelde buiging



1 | Verschillende σ - ε -diagrammen voor metselwerk

a. bilineair diagram (NEN 6790)

b. parabool-rechthoekig diagram

2 | Algemene M - N - κ -diagrammen voor bilineair σ - ε -diagram volgens NEN 6790 bij rechthoekige doorsneden, voor verschillende waarden van de gereduceerde normaalkracht ν

prof.ir.-arch. D.R.W. Martens, Leerstoel Steenconstructies TU-Eindhoven/Bureau Dirk Martens bvba, Zingem (B)

Volgens de TGB Steen (NEN 6790) [1] mogen voor de berekening van de respons van steenconstructies drie verschillende theorieën worden toegepast, waarvoor in de norm enkel de uitgangspunten zijn aangegeven. Voor de dagelijkse praktijk kan de constructeur hiermee niet uit de voeten. Dit artikel biedt een antwoord op de vraag naar gebruiksklare formules voor metselwerkwallen die voornamelijk worden belast door normaalkrachten in combinatie met buigende momenten, ook wel samengestelde buiging genoemd. Deze formules kunnen mutatis mutandis eveneens voor ongewapend beton worden toegepast.

Zowel in Eurocode 6 (EC 6) [2] als in NEN 6790 wordt de mogelijkheid gegeven steenconstructies lineair-

elastisch (LE) of niet-lineair elastisch (NLE) te berekenen. In het geval van een lineair-elastische eerste-ordeberekening van de respons van de constructie mag het tweede-orde-effect voor de constructiedelen worden bepaald aan de hand van diagrammen of tabellen die zijn gebaseerd op fysisch niet-lineair gedrag.

De tweede-orde-effecten van de constructiedelen kunnen eveneens worden berekend door gebruik te maken van de niet-lineaire-elasticiteitstheorie of de quasi-lineaire-elasticiteitstheorie (QLE). In beide gevallen moet worden beschikt over het corresponderende M - N - κ -diagram, gebaseerd op het fysisch niet-lineair gedrag van metselwerk.

Deze benadering is niet helemaal juist, aangezien hierbij de interactie tussen het tweede-orde-effect van de constructiedelen en het mechanisch gedrag van de gehele constructie wordt verwaarloosd. Deze benadering is evenwel conservatief en daardoor aanvaardbaar.

Fysisch niet-lineair gedrag

De modellering van het fysisch niet-lineair gedrag van metselwerk is afhankelijk van het gekozen σ - ε -diagram. Volgens de Nederlandse norm geldt het bilineair diagram (fig. 1a). In EC 6 zijn het lineair, het parabool of het parabool-rechthoekig diagram toegestaan (fig. 1b). In alle gevallen wordt ervan uitgegaan dat metselwerk geen trekspanningen kan opnemen en dat de verlengingen en verkortingen die de vezels ondergaan, recht evenredig zijn met de afstand tot de neutrale lijn. Zelfs bij het lineaire σ - ε -diagram leidt dit tot niet-lineair materiaalgedrag.

M - N - κ -diagram

Het niet-lineair gedrag van metselwerk is afhankelijk van de normaalkracht die in de doorsnede aanwezig is. Voor het toetsen van een constructiedeel in de uiterste grenstoestand bij druk en buiging is de normaalkracht constant en moet het buigend moment worden bepaald rekening houdend met het tweede-orde-effect. Hiervoor moet men beschikken over het M - κ -diagram dat overeenstemt met de beschouwde normaalkracht. Voor elke normaalkracht moet dus een ander diagram worden berekend. Voor een eerste benadering kan gebruik worden gemaakt van algemene grafieken, waarin de volgende dimensieloze grootheden worden gehanteerd:

gereduceerd moment:

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f'_d}$$

gereduceerde normaalkracht:

$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f'_d} \quad (\text{benuttingsgraad } \alpha)$$

relatieve kromming: $\kappa \cdot h$

In figuur 2 is een dergelijke grafiek getekend met waarden van v variërend van 0,1 tot 0,9 voor rechthoekige doorsneden met breedte b en hoogte h conform NEN 6790. Hierbij is f'_d de rekenwaarde van de metselwerkdruksterkte.

Voor exacte berekeningen kan een specifieke grafiek worden berekend voor de juiste waarde van N . Volgens de meest recente versie van NEN 6790 (2005) mag het $M-N-\kappa$ -diagram ook worden benaderd door een vereenvoudigd bilineair diagram zoals weergegeven in figuur 3. De aandachtige lezer zal opmerken dat dit diagram afwijkt van het (onrealistische) diagram dat in de oude versie van de TGB Steen was opgenomen.

Algemene werkwijze

De gedetailleerde berekening van het $M-N-\kappa$ -diagram voor een specifieke waarde van de normaalkracht moet gebeuren aan de hand van de evenwichtsvergelijkingen, de compatibiliteitsvergelijkingen en de constitutieve relaties. Hierbij moet onderscheid worden gemaakt tussen gescheurde en ongescheurde doorsneden. Voor $\sigma-\varepsilon$ -diagrammen met een plastische tak moet bovendien worden geëvalueerd of de rekken in de doorsnede al dan niet kleiner zijn dan de maximale elastische rek ε_e . Voor het bilineaire en het parabool-rechthoekige $\sigma-\varepsilon$ -diagram is de maximale elastische rek respectievelijk $2,5\text{‰}$ en $2,0\text{‰}$ (fig. 1).

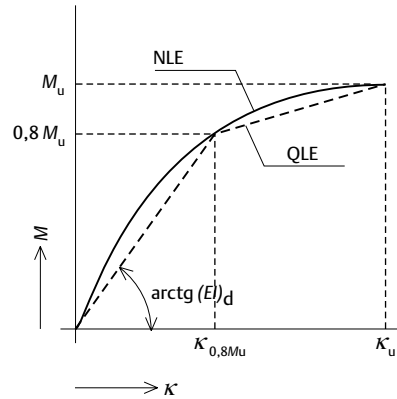
Lineair-elastisch gedrag

Voor vrij brosse materialen zoals metselwerk met geperforeerde baksteen, kan het aangewezen zijn een lineair-elastisch gedrag aan te nemen. In dit geval kan het $M-N-\kappa$ -diagram worden berekend zoals in figuur 4 is aangegeven.

Als de excentriciteit $e \leq h/6$, is de doorsnede ongescheurd en kan de $M-\kappa$ -relatie als volgt worden berekend.

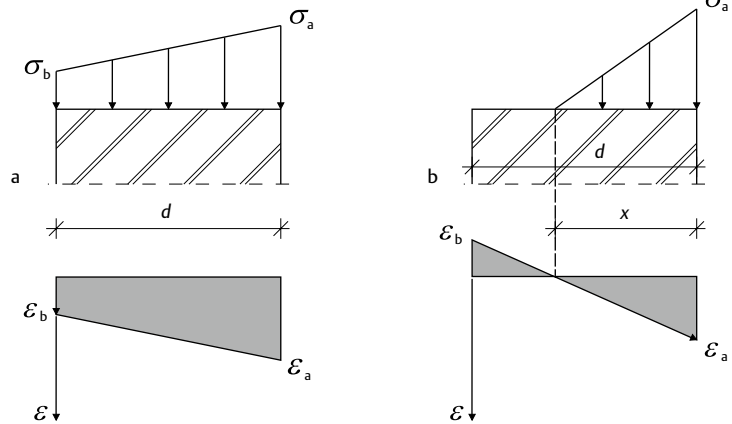
Evenwichtsvoorwaarden

$$N = \frac{\sigma_1 + \sigma_r}{2} b h \quad (1)$$



3 | Niet-lineair-elastisch (NLE) en quasi-lineair-elastisch (QLE) $M-N-\kappa$ -diagram

4 | Spannings- en vervormingsdiagrammen bij lineair-elastisch gedrag
a. ongescheurde doorsnede ($e \leq h/6$)
b. gescheurde doorsnede ($e > h/6$)



$$M = \frac{\sigma_r - \sigma_1}{2} b h \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3} \right) = \frac{b h^2}{12} (\sigma_r - \sigma_1) \quad (2)$$

Compatibiliteitsvoorwaarde

$$\kappa = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_1}{h} \quad (3)$$

Constitutieve relaties

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (4)$$

$$\sigma_r = E \varepsilon_r \quad (5)$$

$$\text{met } E = \frac{f'_d}{0,0025}$$

Rekening houdend met (4) en (5) kan vergelijking (2) worden omgevormd tot

$$M = \frac{b h^2}{12} E (\varepsilon_r - \varepsilon_1) \quad (6)$$

Eliminatie van ε_r en ε_1 uit (6) en (3) levert uiteindelijk de gezochte $M-\kappa$ -relatie, of in dimensionloze vorm:

$$0 \leq e \leq \frac{h}{6} : \mu = \frac{E}{12 \cdot f'_d} \cdot \kappa \cdot h \quad \text{of} \quad \mu = \frac{\kappa \cdot h}{0,03} \quad (7)$$

Als de excentriciteit $e > h/6$, is de doorsnede gescheurd en moet de $M-\kappa$ -relatie als volgt worden berekend.

Evenwichtsvoorwaarden

$$N = \frac{b \times \sigma_r}{2} \tag{8}$$

$$M = N \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) \tag{9}$$

Compatibiliteitsvoorwaarde

$$\kappa = \frac{\epsilon_r}{x} \tag{10}$$

Constitutieve relaties

$$\sigma_r = E \epsilon_r \tag{11}$$

Uit de vergelijkingen (8), (10) en (11) kan de hoogte van de gedrukte zone x worden berekend:

$$x = \sqrt{\frac{2 v h f'_d}{E \kappa}} \tag{12}$$

Eliminatie van x uit (9) en (12) levert dan de gezochte M - κ -relatie, of in dimensieloze vorm:

$$\frac{h}{6} \leq e \leq \frac{h}{2}: \mu = v \cdot \left[0,5 - \sqrt{\frac{2 v \cdot f'_d}{9 E \cdot \kappa \cdot h}} \right] \text{ of} \tag{13}$$

$$\mu = v \cdot \left(0,5 - \sqrt{\frac{v}{1800 \cdot \kappa \cdot h}} \right)$$

Deze formules kunnen gemakkelijk in een rekenblad worden verwerkt. In figuur 5 zijn de resultaten weergegeven van de berekening van het M - N - κ -diagram van een rechthoekige doorsnede bij lineair-elastisch σ - ϵ -diagram.

M - N - κ volgens NEN 6790

Volgens de Nederlandse metselwerknorm moet voor de berekening van het M - N - κ -diagram het bilineair σ - ϵ -diagram worden gebruikt. Voor een dergelijk diagram is de berekening iets bewerklijker. Na enig

eenvoudig rekenwerk kunnen de volgende M - κ -relaties worden bepaald.

$$0 \leq \epsilon_r \leq 2,5^\circ /_{\infty} \text{ en } \epsilon_1 \geq 0:$$

$$\mu = \frac{\kappa \cdot h}{0,03} \tag{14}$$

$$2,5^\circ /_{\infty} \leq \epsilon_r \leq 3,5^\circ /_{\infty} \text{ en } \epsilon_1 \geq 0:$$

$$\mu = \frac{1-v}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-v}{450 \cdot \kappa \cdot h}} \right) \tag{15}$$

$$0 \leq \epsilon_r \leq 2,5^\circ /_{\infty} \text{ en } \epsilon_1 < 0:$$

$$\mu = v \cdot \left(0,5 - \sqrt{\frac{v}{1800 \cdot \kappa \cdot h}} \right) \tag{16}$$

$$2,5^\circ /_{\infty} \leq \epsilon_r \leq 3,5^\circ /_{\infty} \text{ en } \epsilon_1 < 0:$$

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \left(v + \frac{1}{800 \cdot \kappa \cdot h} \right) \cdot \left(1 - v - \frac{1}{800 \cdot \kappa \cdot h} \right) - \frac{1}{1600 \cdot \kappa \cdot h} \cdot \left(1 - 2v - \frac{1}{1200 \cdot \kappa \cdot h} \right) \tag{17}$$

In figuur 6 is het resultaat weergegeven van een berekening van het M - N - κ -diagram voor een gereduceerde normaalkracht $v = 0,3$.

QLE-benadering

Indien gebruik wordt gemaakt van de QLE-theorie moet de stijfheid (EI)_d worden bepaald aan de hand van een rechte door de oorsprong en het punt met coördinaten ($0,8M_u; \kappa_{0,8M_u}$) van het M - N - κ -diagram dat bepaald is met de hiervoor vermelde NLE-theorie en zoals aangeduid in figuur 3.

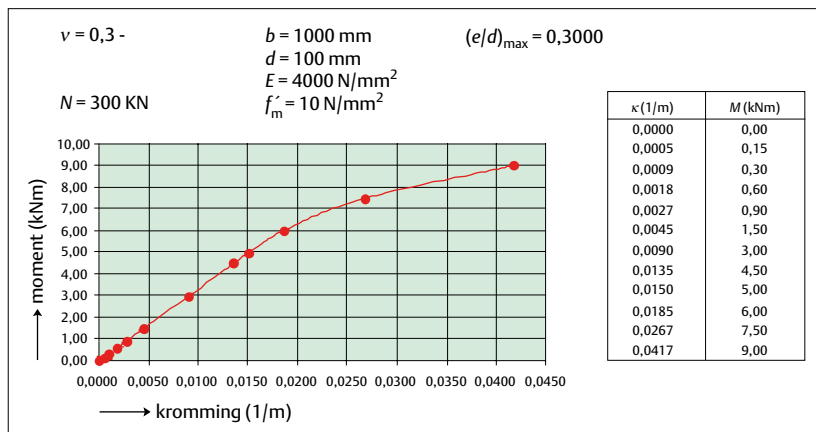
Het is niet handig eerst het gehele M - N - κ -diagram te moeten berekenen om nadien slechts twee punten te gebruiken. Daarom worden formules gegeven waarmee het bilineair M - N - κ -diagram eenvoudig en snel kan worden bepaald.

Eerst moeten het uiterst opneembaar moment M_u en de corresponderende kromming κ_u worden berekend. Hiervoor kunnen de volgende formules worden gebruikt:

$$0,643 < v < 1: \mu_u = 0,262 (1 - v)$$

$$\kappa_u = \frac{9 \cdot 0,0035}{14 \cdot v h} \tag{18}$$

5 | M - N - κ -diagram bij lineair-elastisch σ - ϵ -diagram



$$0 < v < 0,643: \mu_u = -0,5514 \cdot v^2 + 0,5 \cdot v$$

$$\kappa_u = \frac{140,0035(1-v)}{5h} \quad (19)$$

Vervolgens moet de kromming worden bepaald die hoort bij 80% van het uiterst opneembaar moment M_u . Hierbij moeten verschillende gevallen worden onderzocht, aangezien het op voorhand niet duidelijk is of de stuik aan de meest gedrukte zijde al dan niet groter is dan de maximale elastische rek van $2,5\text{‰}$ en of de doorsnede al dan niet is gescheurd. Theoretisch moeten dus steeds vier verschillende situaties worden onderzocht. Afhankelijk van de grootte van de relatieve excentriciteit

$$\frac{e}{h} = \frac{0,8M_u}{Nh}$$

zal slechts één van de volgende vier situaties van toepassing zijn.

Ongescheurde doorsnede: $e/h \leq 1/6$

$$0 \leq \varepsilon_r \leq 2,5\text{‰} \text{ en } \varepsilon_l \geq 0:$$

$$\kappa = \frac{0,03\mu}{h} \quad (20)$$

invoergegevens:

$b = 1000 \text{ mm}$
 $h = 100 \text{ mm}$
 $f_d = 10 \text{ N/mm}^2$
 $N = 300 \text{ kN}$
 $\mu_{\max} = 0,1004$

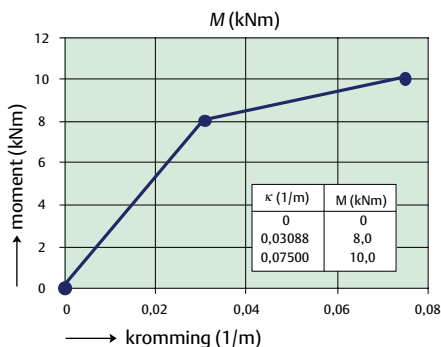
$M_{\max} = 10,0 \text{ kNm}$
 $\kappa_{\max} = 0,07500 \text{ 1/m}$

$0,8M_{\max} = 8,0 \text{ kNm}$
 $\kappa_{0,8m} = 0,030876 \text{ 1/m}$

$\kappa_{\max} \cdot h = 0,00750$
 $e = 26,8 \text{ mm}$
 $e/h = 0,26766$

berekening van de tussenresultaten:

$v = 0,3000$ - als $e/h < 0,1667$
 $u = 0,0803$ - en $e/h < 0,3889$
 $\kappa_1 = 0,024090 \text{ 1/m}$ - als $e/h \geq 0,3889$
 $\kappa_2 = 0,026197 \text{ 1/m}$ - en $e/h < 0,0778$
 $\kappa_3 = 0,030876 \text{ 1/m}$ - als $e/h \geq 0,1667$
 $\kappa_4 = 0,03247 \text{ 1/m}$ - en $e/h < 0,3000$
 als $e/h \geq 0,3000$
 en $e/h < 0,3346$



Geometrische gegevens

breedte = $b = 1000 \text{ mm}$
 dikte = $h = 100 \text{ mm}$

Materiaalgegevens

druksterkte = $f_m' = 10 \text{ N/mm}^2$
 maximale rek bij lineair gedrag (%) = $\varepsilon_{\lambda} = 2,5\text{‰}$
 maximale totale rek (%) = $\varepsilon_u = 3,5\text{‰}$
 normaalkracht = $N = 300 \text{ kN}$
 $v = 0,3$

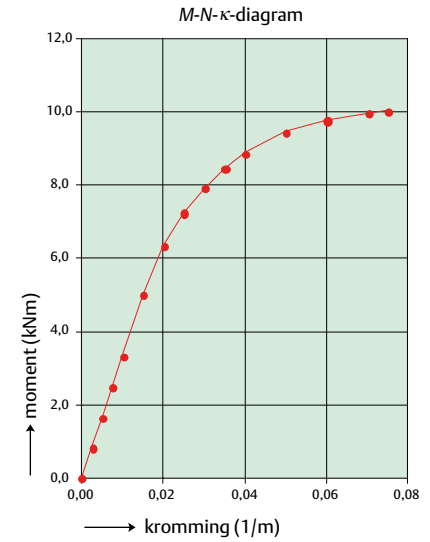
M-N- κ -diagram

maximaal opneembaar moment = $M_{\max} = 10,04 \text{ kNm}$
 maximale kromming = $\kappa_{\max} = 0,07500 \text{ 1/m}$

$f_m' = 10 \text{ N/mm}^2$
 $\varepsilon_{\lambda} = 2,5\text{‰}$
 $\varepsilon_u = 3,5\text{‰}$
 $N = 300 \text{ kN}$
 $v = 0,3$

$\mu_{\max} = 0,1004$ - $M_{\max} = 10,04 \text{ kNm}$
 $\kappa_{\max} = 0,07500 \text{ 1/m}$ - $\kappa_{\max} \cdot h = 0,0075$

κ (1/m)	M (kNm)	$\kappa_{\max} \cdot h$	μ
0,00000	0,000	0,00000	0,0000
0,00250	0,833	0,00025	0,0083
0,00500	1,667	0,00050	0,0167
0,00750	2,500	0,00075	0,0250
0,01000	3,333	0,00100	0,0333
0,01500	5,000	0,00150	0,0500
0,02000	6,340	0,00200	0,0634
0,02500	7,254	0,00250	0,0725
0,03000	7,929	0,00300	0,0793
0,03500	8,453	0,00350	0,0845
0,04000	8,876	0,00400	0,0888
0,05000	9,458	0,00500	0,0946
0,06000	9,777	0,00600	0,0978
0,07000	9,969	0,00700	0,0997
0,07500	10,037	0,00750	0,1004



$$2,5\text{‰} \leq \varepsilon_r \leq 3,5\text{‰} \text{ en } \varepsilon_l \geq 0:$$

$$\kappa = \frac{(1-v)^3}{450h(1-v-2\mu)} \quad (21)$$

Gescheurde doorsnede: $e/h > 1/6$

$$0 \leq \varepsilon_r \leq 2,5\text{‰} \text{ en } \varepsilon_l < 0:$$

$$\kappa = \frac{v^3}{450h(v-2\mu)^2} \quad (22)$$

$$2,5\text{‰} \leq \varepsilon_r \leq 3,5\text{‰} \text{ en } \varepsilon_l < 0:$$

$$\kappa = \frac{1}{800h\sqrt{3v(1-v)} - 6\mu} \quad (23)$$

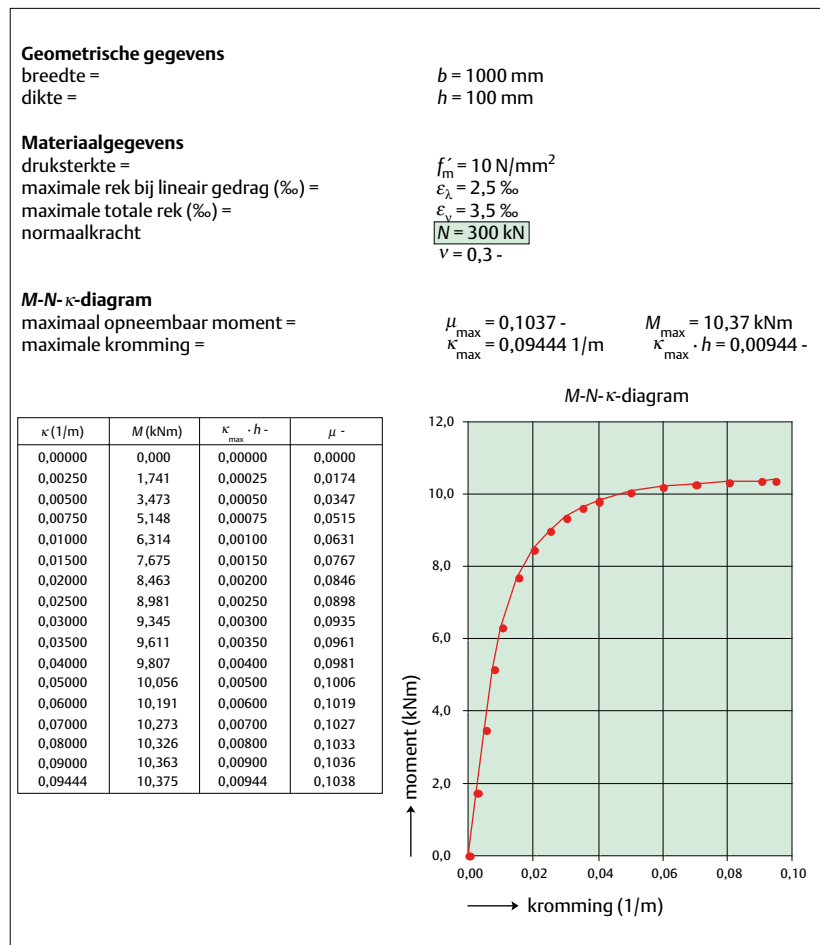
In figuur 7 is de berekening weergegeven van het M-N- κ -diagram volgens de QLE-theorie voor een rechthoekige doorsnede met dezelfde karakteristieken als in figuur 6.

Andere σ - ε -diagrammen

Het Nederlandse model is evenwel niet opgenomen in de Europese norm voor steenconstructies. EC 6 gaat uit van het parabool-rechthoekig of het para-

6 | Berekening van het M- κ -diagram van een rechthoekige doorsnede conform NEN 6790

7 | Berekening van het M- κ -diagram van een rechthoekige doorsnede conform de QLE-theorie



8 | Berekening van het M- κ -diagram van een rechthoekige doorsnede conform EC 6

boolvormig σ - ϵ -diagram, afhankelijk van het type metselwerk (volle of geperforeerde stenen). De formules voor de berekening van het hiermee corresponderend M-N- κ -diagram zijn complexer dan bij het bilineair diagram. Ondubbeltzinnige formules kunnen in dit geval niet worden opgesteld, aangezien in een aantal situaties de oplossing van een derdegraadsvergelijking is vereist. In figuur 8 is het resultaat van een berekening weergegeven voor een rechthoekige doorsnede met dezelfde karakteristieken als in figuur 6 en waarbij voor de maximale elastische rek en de uiterste rek respectievelijk 2,0‰ en 3,5‰ zijn aangenomen.

Slotbeschouwingen

Het bepalen van het fysisch niet-lineair gedrag van metselwerk is noodzakelijk voor de berekening van de stijfheid van constructie-elementen en voor de bepaling van de tweede-orde-effecten. Afhankelijk van de gebruikte steentypes zal een lineair of niet-lineair σ - ϵ -diagram moeten worden toegepast. Noch de Nederlandse noch de Europese normen bevatten concrete informatie voor de praktische berekening van het M-N- κ -diagram. In dit artikel is deze leemte opgevuld door gebruiksklare formules te verschaffen voor rechthoekige doorsneden. Hiermee is de bepaling van de M- κ -relatie voor elke constructeur een sinecure

geworden. Voor niet-rechthoekige doorsneden is het niet evident om algemeen geldende formules vast te stellen en is het aangewezen een (iteratieve) numerieke berekening uit te voeren.

Uit de vergelijking van de resultaten van de berekeningen volgens de in dit artikel gebruikte modellen blijkt dat deze niet sterk verschillen inzake het uiterst opneembaar moment, maar wel wat de maximale kromming en de initiële stijfheid betreft. Bij de keuze van het meest geschikte model moet derhalve worden uitgegaan van de reële vervormingscapaciteit en stijfheid van de gebruikte materialen. In een volgend artikel zal worden geïllustreerd hoe het M-N- κ -diagram kan worden aangewend voor de berekening van het tweede-orde-effect bij dragende metselwerkwallen conform NEN 6790. ■

Literatuur

1. NEN 6790, Technische grondslagen voor bouwconstructies – TGB 1990 – Steenconstructies – Basiseisen en bepalingsmethoden, april 2005.
2. NEN-EN 1996-1-1, Eurocode 6. Ontwerp en berekening van steenconstructies. Deel 1-1: Algemene regels voor gebouwen. Regels voor gewapende en ongewapende steenconstructies.
3. Martens, D.R.W., A.T. Vermeltoort en G. Bertram, Collegedictaat Ontwerpen en dimensioneren van steenconstructies. TU Eindhoven, augustus 2000.